９７學年度南臺灣國中教師甄選數學科試題

單選題：以下題目共 50 題，為四選一單選選擇題(每題 2 分，共 100 分)

1. 1 至 2000 的自然數中，求是 5 的倍數但不是 7 的倍數者有多少個？ (A)57 (B)285 (C)343 (D)400
2. 求 $7^5+4\times7^4-17\times7^3-24\times7^2+36\times7$ 之值。 (A)5796 (B)8182 (C)13432 (D)19656
3. 有一四邊形 ABCD，其對角線長分別爲 $\overline{AC}=12$，$\overline{BD}=11$，兩對角線夾角爲 θ 與 ϕ。若 $\theta=3\phi$，求此四邊形面積。(A) $33\sqrt{2}$ (B)32 (C) $22\sqrt{2}$ (D) $11\sqrt{2}$
4. 設兩直線 $2x^2+5xy+3y^2-3x-5y-2=0$ 之夾角爲 θ，求 $\sin\theta$。(A) $\frac{1}{\sqrt{26}}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{13}}$ (D) $\frac{1}{2}$
5. 下列不等式何者正確？($\log_{10}2=0.301$，$\log_{10}3=0.4771$)
(A) $100^{20}>50^{30}>10^{50}>5^{100}$ (B) $5^{100}>50^{30}>10^{50}>100^{20}$ (C) $50^{30}>5^{100}>10^{50}>100^{20}$ (D) $5^{100}>10^{50}>50^{30}>100^{20}$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)^{10}-1}{x}=$ (A)1 (B)-1 (C)10 (D)-10
7. 在 $y=x^2$ 上距離(0,2)最近的點爲 (A) $(0,0)$ (B) $(\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{3}{2})$ (C) $(\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{2}{3})$ (D) $(\sqrt{\frac{7}{3}},\frac{7}{3})$
8. 三直線 $L_1:3x-y-1=0,\ L_2:x-y+1=0,\ L_3:2x+ky+1=0$ 不能圍成一個三角形，則 k 值爲(A)-2 (B)2 (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{2}$
9. 若 $|x+\frac{1}{2}|\le\frac{3}{2},\ |y-\frac{5}{2}|\le\frac{1}{2}$，則(A) $4\le x^2+y^2\le13$ (B) $0\le x^2+y^2\le9$ (C) $-4\le x\cdot y\le4$ (D) $-6\le x\cdot y\le6$
10. $(1+x)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$ 則 $a_0,a_1,\cdots,a_{10}$ 的中位數爲 (A)45 (B)50 (C)55 (D)60
11. $2x^2+kx+3>x^2-x+2$ 恆成立，則 k 值的範圍爲 (A) $-3<k$ (B) $-3<k<1$ (C) $k>1$ (D) $k>2$
12. 設 $a,b\in R$, "$a>b$"是 "$a^2>b^2$" 的(A)必要條件 (B)充分條件 (C)非充分且非必要條件 (D)充要條件
13. 設 $S=\{0,\{0\},\phi\}$，則下列敘述何者正確？(A) $\phi\subset S$ (B) $\{0\}\notin S$ (C) $\{0\}\not\subset S$ (D) $\phi\notin S$
14. 設 $f(x)=\begin{cases}x^2+3, & 0\le x<2\\ 9-x, & 2\le x<6\end{cases}$ 且 $f(x+6)=f(x)$ 則 $f(14)+f(f(13))$ 爲(A)10 (B)11 (C)12 (D)13
15. 設 $x,y\in R$，下列何者表示 y 是 x 的函數？(A) $x^2+y^2=9$ (B) $x\ \ +y^2=9$ (C) $y=\sqrt{x^2+9}$ (D) $x=\sqrt{y^2+9}$
16. 設 $f(n)$ 表 7^n 除以 10 的餘數，則 $f(1)+f(2)+\cdots+f(101)$ 爲(A)607 (B)605 (C)507 (D)505
17. $\sin1^\circ+\sin2^\circ+\cdots+\sin359^\circ+\sin360^\circ=$？ (A)360 (B)180 (C)0 (D)-180
18. 下列何者不是數系(number system) (A)有理數 (B)小數 (C)實數 (D)複數
19. 七位數 26ab508 爲 99 的倍數，則 a+3b= (A)6 (B)8 (C)10 (D)12
20. 不大於 143 且與 143 互質的自然數個數是 (A)96 (B)112 (C)120 (D)136
21. 幾何原本(Elements)的編著者是 (A)柏拉圖(Plato) (B)阿基米德(Archimedes) (C)歐幾里德(Euclid) (D)畢達哥拉斯(Pythagoras)
22. 三邊長分別爲 5，12，13 的三角形，三邊上高的總和在那一個範圍 (A)[20,21) (B)[21,22) (C)[22,23) (D)[23,24]
23. $f(x)=x^2+5$，$g(x)=\sqrt{x}$，則 $f(g(2))=$ (A)3 (B)5 (C)7 (D)9
24. $x>0$，$y=x+\frac{2}{x}$ 之最小值爲 (A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{3}$
25. 化 $\frac{12x-22}{x^2-4x+3}$ 爲部分分式 $\frac{b}{x+a}+\frac{d}{x+c}$，則 $a+b+c+d=$ (A)11 (B)10 (C)9 (D)8
26. 設 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$，則滿足 $A^n=I$ 的最小自然數 n 是 (A)2 (B)3 (C)4 (D)6
27. 方程式 $x^2+y^2-\sqrt{24}x-18y-202=0$ 所代表的圓之半徑爲 (A)21 (B)17 (C)15 (D)13
28. $\lim_{x\to0}(x\sin\frac{1}{x})=$ (A)不存在 (B)0 (C)1 (D)∞

29. $1+\log_2 x$ 之值域爲 (A) $\{y:y>0\}$ (B) $\{y:y>1\}$ (C) $\{y:y\neq 1\}$ (D) R

30. 有一邊長爲 $\sqrt{3}$ 之正三角形，其內切圓半徑與外接圓半徑之和爲 (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D)3

31. x>2 爲 (x-2)(x+2)>0 之何種條件? (A)充分 (B)必要 (C)充要 (D)若且唯若

32. 一正整數介於 800 及 900 之間，它除以 3 餘 1，除以 5 餘 2，除以 7 也餘 2，則它除以 11 之餘數爲何?
(A)6 (B)7 (C)8 (D)9

33. $x+y+z=10$ 之正整數解有幾組？ (A)18 (B)24 (C)36 (D)48

34. 平面上 10 條線最多可以把平面分割爲幾個不重疊的區域? (A)36 (B)48 (C)56 (D)64

35. 設 $f(a)=\log\frac{1-a}{1+a}$，$|a|<1$。若 $f(-a)=1$，求 $f\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)$ 之值？ (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

36. 設 $0\le\theta\le 2\pi$，且 $\cos\theta+\sin\theta=\frac{1}{x}+\frac{x}{2}$，$(x>0)$，則 $x=$? (A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}-1$ (C) $\sqrt{2}+1$ (D) $\sqrt{2}-1$

37. 設 $b=a^4-27a^2+81$，其中 a,b 均爲正整數，若 b 爲質數，則 $a+b=$? (A) 16 (B) 28 (C) 36 (D) 48

38. 設 $f(x)>0$ 且 $f(4)=54$，對所有 $x,y\in R$ 滿足 $2f(x+y)=f(x)f(y)$，求 $f(\frac{4}{3})=$? (A) 4 (B) 6 (C) 10 (D) 15

39. 求 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 32 \\ 2 & 12 & 72 \end{vmatrix}$ 之值爲？(A) 32 (B) 64 (C) 128 (D) 256

40. 設 $34x788y$ 爲 72 的倍數，則 $x-y$ 的可能值爲何? (A) -2 (B) 0 (C) 3 (D) 6

41. 求 $1!+2!+3!+\cdots+10!$ 除以 10 的餘數爲何? (A) 0 (B) 3 (C) 6 (D) 9

42. 設 $X\sim N(2,1)$，$Y\sim N(2,2)$，令 $Z=2X-Y$，則下列敘述何者正確?
(A) Z 爲常態分配 (B) Z 的變異數爲 10 (C) Z 的變異數爲 6 (D) Z 的期望值爲 2

43. 設 A,B 均爲 n 階方陣，I 爲 n 階單位方陣，則下列敘述何者正確?
(A) 若 $AB=0$，則 $BA=0$ (B) 若 $A^2=B^2$，則 $A=B$ 或 $A=-B$
(C) $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ (D) $(A+I)^2=A^2+2A+I$

44. 設 $k\in R$，若 $x^3-kx^2+2x-2=0$ 有純虛根，則此方程式的實根爲?(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

45. 設 $a-1$ 與 $a+2$ 均爲方程式 $x^2+|x-3|+5k=0$ 的解，且 $(a-1)(a+2)<0$，則 $k=$?(A) -1 (B) -2 (C) 1 (D) 2

46. 已知 ΔABC 中，$\angle A=120^0$ 且其面積爲 $4\sqrt{3}$，則此三角形的周長的最小值爲?

(A) 6 (B) 8 (C) 6+$4\sqrt{3}$ (D)8+$4\sqrt{3}$

47. ΔABC 爲等腰直角三角形，$\angle A=90^\circ$，$\overline{AB}=\overline{AC}$。自斜邊 $\overline{BC}$ 中取一點 P，已知 $\overline{BP}=2$，$\overline{CP}=4$，則 $\overline{AP}=$?
(A) $\sqrt{10}$ (B) 3 (C) $2\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{3}$

48. 設 $a,b,c,d\in N$，已知 $x^{-1}+2y^{-1}+3z^{-1}+4u^{-1}=5v^{-1}$，$xyzuv\neq 0$ 且 $a^x=\sqrt{(2b)^y}=\sqrt[3]{(3c)^z}=\sqrt[4]{(4d)^u}=\sqrt[5]{240^v}$，

則 a, b, c, d 的可能值共有多少種？ (A) 8 (B) 12 (C) 16 (D) 20

49. 設 x 爲單位圓中內接正 8 邊形的一邊長，則 $x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2n}+\cdots$ 之值爲？(A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C)$2\sqrt{2}$ (D) 4

50. 設 a,b,c 爲正整數，且爲奇數的機率分別爲 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，求 $ab+bc+abc$ 爲奇數的機率?

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{3}{12}$ (C) $\frac{3}{16}$ (D) $\frac{5}{24}$

９７學年度南臺灣國中教師甄選數學科目試題答案

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
C	**D**	**A**	**A**	**B**	**D**	**B**	**A**	**A**	**A**
11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
B	**C**	**A**	**C**	**C**	**C**	**C**	**B**	**C**	**C**
21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
C	**B**	**C**	**B**	**D**	**C**	**B**	**B**	**D**	**B**
31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
A	**C**	**C**	**C**	**A**	**A**	**C**	**B**	**C**	**D**
41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.
B	**D**	**D**	**C**	**A**	**D**	**A**	**C**	**A**	**D**

科目:數學

題號	原答案	修正答案	理由
13	A	維持原答案 A	任何有基本數學概念的人都知道ϕ是空集合的代號，所以$\phi \in S$對，$\phi \subset S$也對。
29	D	維持原答案 D	1. 值域基本上為一集合, 而符號 R 是實數系集合的一般表示法. 2. (A),(B),(C) 中 y 是集合元素代號, 其表示的意思為何從 y>0, y>1, y<>1 即可判讀; 一般在未明確限制數系條件之下, 應直接設想所討論的範圍是在實數系之下的最大可能. 3. 所提問題為學習數學專業應具有的一般通識
42	D	維持原答案 D	兩常態分配的和仍為常態分配須兩常態分配為 independent or bivariate normal 才可,
45	A	維持原答案 A	答案無誤
47	D	A	原答案誤植

97 南區略解

1. [高一]用高斯公式，$[\frac{2000}{5}]-[\frac{2000}{35}]=400-57=343$

2. [國一]直接算，答案是(D)

3. [高一]顯然對角線夾角為 45 度，四邊形面積＝$\frac{1}{2}\times12\times11\times\sin45°=33\sqrt{2}$

4. [高一]因式分解後，$(2x+3y+1)(x+y-2)=0$，兩直線斜率各為－1，$-\frac{2}{3}$

   兩直線夾角的$\tan\theta=\pm\frac{-\frac{2}{3}-(-1)}{1+(-\frac{2}{3})(-1)}=\pm\frac{1}{5}$(取正值)$\Rightarrow\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{26}}$

5. [高一]$\begin{cases}5^{100}\\10^{50}=2^{50}\times5^{50}\\50^{30}=2^{30}\times5^{60}\\100^{20}=2^{40}\times5^{40}\end{cases}\Rightarrow5^{100}>50^{30}>10^{50}>100^{20}$

6. [微積分]羅必達用下去，$\lim_{x\to0}\frac{(x-1)^{10}-1}{x}=\lim_{x\to0}10(x-1)^9=-10$

7. [國三]令此點座標為$(\sqrt{y},y)\Rightarrow$所求距離＝$\sqrt{(y-2)^2+y}=\sqrt{y^2-3y+4}$

   $y=\frac{3}{2}$有最小值。

8. [高二]不能圍成三角形，有兩種狀況：三線交一點，$k=-\frac{3}{2}$；其中兩條直線

   平行，$k=-2,-\frac{2}{3}$。

9. [國一]$\begin{cases}-2\le x\le1\\2\le y\le3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le x^2\le4\\4\le y^2\le9\\4\le x^2+y^2\le13\\-6\le xy\le3\end{cases}$

10. [高二]除了C_5^{10}落單，其他都成對，故中位數為$C_2^{10}orC_8^{10}=45$

11. [國二]移項成$x^2+(k+1)x+1>0$，判別式小於 0$\Rightarrow-3<k<1$。
12. [高一邏輯]非充分非必要。例如 1>-2，但 1<4。
13. [高一集合論](A)才是正確的寫法。
14. [高一] $f(14)+f(f(13))=f(2)+f(f(1))=7+f(4)=7+5=12$

15. [高一](A)(B)(D)的關係都是一對二。
16. [高一]每四次一循環，(7,9,3,1)。所求＝$25\times(7+9+3+1)+7=507$
17. [高一]送分題，相差 180 度的兩個值加起來都是 0。
18. [高一]小數應該算是有理數裡面的特例，分母只有 2,5 的因數。
19. [國一]2+60+a+10b+5+0+8=99$\Rightarrow a=4, b=2 \Rightarrow a+3b=10$
20. [高一]類似第一題，$143-[\frac{143}{11}]-[\frac{143}{13}]+1=120$
21. [常識]選(C)
22. [國二]$5+12+\frac{60}{13}=21\frac{8}{13}$，選(B)
23. [高一] $f(g(2))=2+5=7$
24. [高一]算幾不等式，$y=x+\frac{2}{x}\geq 2\sqrt{x\times\frac{2}{x}}=2\sqrt{2}$
25. [高一]$\frac{12x-22}{x^2-4x+3}=\frac{5}{x-1}+\frac{7}{x-3}\Rightarrow a+b+c+d=8$
26. [線代]A 相當於順時針旋轉 90 度的旋轉矩陣，所以轉四次就回到原地。
27. [高二]配方就好，$(x-\sqrt{6})^2+(y-9)^2=17^2$
28. [微積分]因為$\sin\frac{1}{x}$介於$[-1,1]$，乘上 0，當然就等於 0。
29. [高一]定義域是 x>0，值域則是整個實數系。
30. [國三]內切圓半徑為$\frac{1}{2}$，外接圓半徑為 1。
31. [高一邏輯]充分條件。
32. [高一]中國餘數定理，可得通解為$37+105n$，符合題目範圍的是 877，故除以 11 的餘數為 8。
33. [高二]$H_7^3=C_7^9=36$
34. [高二]$1+\sum_{k=1}^{10}k=56$
35. [高一] $f(-a)=\log\frac{1+a}{1-a}=1, f(\frac{2a}{1+a^2})=\log\frac{(1-a)^2}{(1+a)^2}=2\log\frac{1-a}{1+a}=-2$
36. [高一]夾擠，$\sqrt{2}\geq\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\geq-\sqrt{2}$，又

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{x}+\frac{x}{2}\geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\times\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{x}+\frac{x}{2}=\sqrt{2}\Rightarrow x=\sqrt{2}$$

37. [高一]因式分解，$b=(a^2-3a-9)(a^2+3a-9)=1\times(a^2+3a-9)$
$a=5, b=31, a+b=36$

38. [高一] $2f(\frac{4}{3}+\frac{4}{3})=f(\frac{4}{3})f(\frac{4}{3})\Rightarrow f(\frac{8}{3})=\frac{[f(\frac{4}{3})]^2}{2}$

$$2f(\frac{4}{3}+\frac{8}{3})=f(\frac{4}{3})f(\frac{8}{3})\Rightarrow f(4)=\frac{[f(\frac{4}{3})]^3}{2^2}\Rightarrow f(\frac{4}{3})=6$$

39. [高二]直接算就好，128。

40. [國一] $y\begin{cases}8\\0\end{cases}\Rightarrow x\begin{cases}7\\6\end{cases}\Rightarrow x-y=6,-1$

41. [高一]5!=120，所以只要算 1!+2!+3!+4!=1+2+6+24=33，被 10 除餘 3。

42. [機統]不會。

43. [線代](A)AB 未必等於 BA，(B)(C)是一樣的意思，顯然沒有。

44. [高一]有純虛根，表可分解為 $(x^2+n)(x+p)=0$，其中 n>0，以這個方程式來看，會是 $(x^2+2)(x-1)=0$，故實根為 1。

45. [高一]因為 $(a-1)(a+2)<0\Rightarrow -2<a<1\Rightarrow a-4<0, a-1<0$

將兩根代進去，得到 $\begin{cases}(a-1)^2+|a-4|+5k=0\\(a+2)^2+|a-1|+5k=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2-3a+5k+5=0\\a^2+3a+5k+5=0\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=0\\k=-1\end{cases}$$

46. [高一]設 $\angle A$ 一鄰邊為 x，則另一鄰邊為 $\frac{16}{x}$，則對邊為 $\frac{\sqrt{3}}{2}(x+\frac{16}{x})$，

則周長＝$\frac{2+\sqrt{3}}{2}(x+\frac{16}{x})$，由算幾不等式的精神，最小值發生在 $x=\frac{16}{x}=4$

此時周長為 $8+4\sqrt{3}$

47. [國二]我繼續老梗，設坐標，A(0,0)，B($0,3\sqrt{2}$)，C($3\sqrt{2}$，0)，P($\sqrt{2},2\sqrt{2}$)

$\Rightarrow \overline{AP}=\sqrt{10}$

48. [高一] $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}+\frac{4}{u}=\frac{5}{v}\\ x\log a=\frac{y}{2}\log 2b=\frac{z}{3}\log 3c=\frac{u}{4}\log 4d=\frac{v}{5}\log 240\end{cases}$

$\frac{1}{x}\log 240=\frac{5}{v}\log a$ 依此類推，則

$(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}+\frac{4}{u})\log 240=\frac{5}{v}\log a\cdot 2b\cdot 3c\cdot 4d\Rightarrow abcd=10$，有 (10,1,1,1)與(5,2,1,1)兩種狀況，分別有 4 跟 12 種，所以共 16 種。

49. [高一] $x=2\sin 22.5°=2\sqrt{\dfrac{1-\cos 45°}{2}}\Rightarrow x^2=2-\sqrt{2}$ ，

等比級數和＝$\dfrac{2-\sqrt{2}}{1-(2-\sqrt{2})}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}$

50. [高二] $ab+bc+abc=b(a+c+ac)$ 為奇，則 b 為奇，且 a、c 不同為偶。

$\dfrac{1}{3}[1-(1-\dfrac{1}{2})(1-\dfrac{1}{4})]=\dfrac{5}{24}$