103 桃園 2014. 07. 11 (五)

1. $n \in \mathbb{Z}$, $n^{200} < 5^{300}$, 求 n 的最大值.

Sol. $200 \log n < 300 \log 5$

$\log n < 1.5 \times 0.6990 = 1.0485$

$\log n < \log 10 + 0.0485$

By 内插法:
$\log 2 = 0.3010$
$\log x = 0.0485$
$\log 1 = 0$

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{0.0485-0}{0.3010-0}$$

$x - 1 \fallingdotseq 0.1611$

$x \fallingdotseq 1.1611$

Hence $\log n < \log 10 + \log 1.1611$

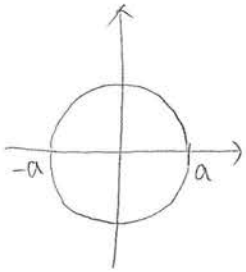
$\log n < \log 11.611$

$\therefore n = 11$

Ans: B

2. $R: x^2+y^2 \le a^2$, $\iint_R e^{-x^2-y^2}\, dx\,dy = ?$

Sol.



Let $x^2+y^2=r^2$

Then $\iint_R e^{-x^2-y^2}\, dx\,dy$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{a} e^{-r^2}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{-2}e^{-r^2}\right]_0^a d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{-2}\left(e^{-a^2}-1\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-e^{-a^2}\right)\cdot 2\pi$$

$$= \pi\left(1-e^{-a^2}\right)$$

Ans: A.

3. 設 $N = 100! = 2^k \cdot 3^m \cdot P$, $(P,6)=1$, 則 $(k,m) = ?$

Sol.

$$k = \left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{4}\right]+\left[\frac{100}{8}\right]+\left[\frac{100}{16}\right]+\left[\frac{100}{32}\right]+\left[\frac{100}{64}\right]$$

$$= 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1$$

$$= 97$$

$$m = \left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{100}{9}\right]+\left[\frac{100}{27}\right]+\left[\frac{100}{81}\right]$$

$$= 33 + 11 + 3 + 1$$

$$= 48$$

$\therefore (k,m) = (97, 48)$

Ans: C

4. $A = 11^7 - 10\cdot 11^6 - 12\cdot 11^5 + 9\cdot 11^4 + 23\cdot 11^3 - 13\cdot 11^2 + 30\cdot 11 + 2$，求 $A=?$

Sol. 設 $f(x) = x^7 - 10x^6 - 12x^5 + 9x^4 + 23x^3 - 13x^2 + 30x + 2$

則 $f(11)$ 可視為 $f(x)$ 除以 $x-11$ 的餘式.

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
1 & -10 & -12 & 9 & 23 & -13 & 30 & 2 & 11 \\
 & 11 & 11 & -11 & -22 & 11 & -22 & 88 & \\
\hline
1 & 1 & -1 & -2 & 1 & -2 & 8 & \boxed{90} &
\end{array}
$$

$\therefore A = 90.$ Ans: A

5. $a, b \in \mathbb{R}^+$，$\log_7 a = 11$，$\log_7 b = 13$，求 $\log_7 (a+b) = ?$

Sol. $a = 7^{11}$，$b = 7^{13}$

$$
\begin{aligned}
\log_7(a+b) &= \log_7(7^{11} + 7^{13}) \\
&= \log_7[7^{11}(1+7^2)] \\
&= \log_7 7^{11} + \log_7 50 \\
&\fallingdotseq 11 + \log_7 7^2 \\
&= 13
\end{aligned}
$$

50很接近 7^2

Ans: D

6. $\sum_{k=1}^{10}(1+x^2)^k$，求 x^6 項的係數？

Sol. 原式 $=(1+x^2)^1+(1+x^2)^2+(1+x^2)^3+(1+x^2)^4+(1+x^2)^5+\cdots+(1+x^2)^{10}$

$\Rightarrow\ 0+0+C^3_3(x^2)^3+C^4_3(x^2)^3+C^5_3(x^2)^3+\cdots+C^{10}_3(x^2)^3$

x^6 的係數 $=C^3_3+C^4_3+C^5_3+C^6_3+\cdots+C^{10}_3$

$=\underbrace{C^4_4+C^4_3}_{=C^5_4}+C^5_3+C^6_3+\cdots+C^{10}_3$

$=C^{11}_4=\dfrac{11\cdot 10\cdot \overset{3}{\cancel{9}}\cdot\cancel{8}}{\cancel{4\cdot 3\cdot 2}}=330$

Ans: C

7. 等差數列前 n 項之和為 100，前 3n 項之和為 1200，求前 2n 項之和 = ?

Sol. 設 $n=1$，則 $S_1=100$，$S_3=1200$

$S_3=a_1+a_2+a_3=3a_1+3d=1200$

$\Rightarrow a_1+d=400 \Rightarrow d=300$

$\therefore S_2=a_1+a_2=2a_1+d=200+300=500$

Ans: B.

8. 將1,2,3,4,5,6,7任意排列，則1排在2、3前面的機率？

Sol. 1~7任意排後，1要不在2,3之前，或2,3中間，

或2,3之後

∴ 機率為 $\frac{1}{3}$

Ans: D

9. 有100名員工，年資平均為10年，標準差為3年，月薪平均為5萬，標準差為2萬。

設年資與月薪的相關係數為0.6，

則月薪對年資的迴歸直線為何？

Sol. 設月薪 = y，年資 = x

則 y' 對 x' 的迴歸直線為 $y' = r \cdot x'$，

其中 r 為相關係數，y', x' 為 y, x 標準化後的值。

$$\therefore \quad y' = r \cdot x'$$

$$\Rightarrow \frac{y-5}{2} = 0.6 \cdot \frac{x-10}{3}$$

$$\Rightarrow y-5 = 0.4(x-10)$$

$$\Rightarrow y = 0.4x+1$$

Ans: B

10. $f(x)=x\cos x$， $y=f(x)$ 在 $x=\pi$ 附近的增減性與凹性為何？

Sol. $f'(x)=1\cdot\cos x+x(-\sin x)$, $f'(\pi)=\cos\pi+\pi(-\sin\pi)=-1<0$ ↓.

$f''(x)=-\sin x+1\cdot(-\sin x)+x\cdot(-\cos x)$

$f''(\pi)=-\sin\pi+(-\sin\pi)+\pi\cdot(-\cos\pi)=\pi>0$ 凹口向上

Ans: C.

11. 化簡 $\frac{1}{\sin x+1}+\frac{1}{\cos x+1}+\frac{1}{\tan x+1}+\frac{1}{\cot x+1}+\frac{1}{\sec x+1}+\frac{1}{\csc x+1}$.

Sol. 原式 $=\frac{1}{\sin x+1}+\frac{1}{\cos x+1}+\frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}+1}+\frac{1}{\frac{\cos x}{\sin x}+1}+\frac{1}{\frac{1}{\cos x}+1}+\frac{1}{\frac{1}{\sin x}+1}$

$$=\underset{①}{\frac{1}{\sin x+1}}+\underset{②}{\frac{1}{\cos x+1}}+\underset{③}{\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}}+\underset{④}{\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}}+\underset{⑤}{\frac{\cos x}{1+\cos x}}+\underset{⑥}{\frac{\sin x}{1+\sin x}}$$

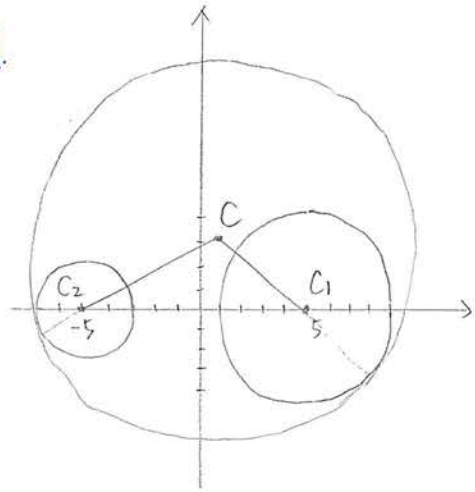
$=$ (① + ⑥) + (② + ⑤) + (③ + ④)

$=1+1+1=3$

Ans: C

12. 若圓C與兩定圓 $C_1:(x-5)^2+y^2=16$, $C_2:(x+5)^2+y^2=4$ 相內切,
求C的圓心軌跡方程式.

Sol.



設圓C的半徑為r

則 $\overline{CC_1}=r-4$

$\overline{CC_2}=r-2$

$\Rightarrow \left|\overline{CC_1}-\overline{CC_2}\right|=2$

符合雙曲線的定義

$\therefore 2a=2 \Rightarrow a=1$, 又 $\overline{C_1C_2}=2c=10 \Rightarrow c=5$

$\because c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b^2=25-1=24$, 中心$(0,0)$

$\therefore$ 圓C的軌跡方程式為: $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{24}=1$ Ans: A.

13. 三顆相同蘋果, 四根相同香蕉, 五顆相同水梨
分給甲, 乙, 丙三人, 每人至少得1的方法有幾種?

Sol. 任意分 − 有1人沒拿 + 有2人沒拿

$= H^3_3 H^3_4 H^3_5 - C^3_1 H^2_3 H^2_4 H^2_5 + C^3_2 H^1_3 H^1_4 H^1_5$

$= C^5_3 C^6_4 C^7_5 - 3\cdot C^4_3\cdot C^5_4\cdot C^6_5 + 3\cdot C^3_3 C^4_4 C^5_5$

$= 10\times 15\times 21 - 3\times 4\times 5\times 6 + 3$

$= 3150 - 360 + 3 = 2793$ Ans: D

14. $L_1: \frac{x-11}{4} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+7}{-1}$, $L_2: \frac{x+5}{3} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z-6}{-2}$,

求 L_1 與 L_2 的距離？

Sol. 先判斷兩直線的關係，

$\because$ L_1, L_2 的方向向量不平行

$\therefore$ L_1, L_2 不是交於一點就是歪斜.

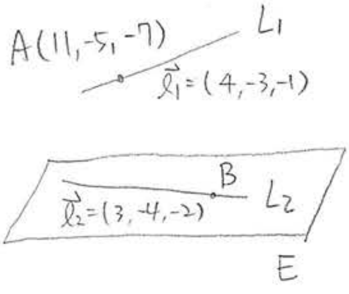
$$L_1: \begin{cases} x = 11+4t \\ y = -5-3t, \ t \in \mathbb{R} \\ z = -7-t \end{cases} \qquad L_2: \begin{cases} x = -5+3s \\ y = 4-4s, \ s \in \mathbb{R} \\ z = 6-2s \end{cases}$$

設 L_1, L_2 的交點為 $P(x, y, z)$.

則
$$\begin{cases} 11+4t = -5+3s & \cdots ① \\ -5-3t = 4-4s & \cdots ② \\ -7-t = 6-2s & \cdots ③ \end{cases}$$

由①,②解得 $t = -\frac{37}{7}$, $s = -\frac{12}{7}$，代入③得 $-2 = 11$（不合）

故 L_1, L_2 沒有交點，即 L_1 與 L_2 歪斜.



作一平面 E 包含 L_2 且與 L_1 平行

則平面 E 的法向量 $\vec{n} = \vec{\ell_1} \times \vec{\ell_2}$

$$\begin{array}{cccccc} 4 & -3 & -1 & 4 & -3 & -1 \\ 3 & -4 & -2 & 3 & -4 & -2 \\ \hline & (2, & 5, & -7) & & \end{array}$$

將 L_2 上一點 $B(-5,4,6)$ 代入 $E: 2x+5y-7z \xrightarrow{(-5,4,6)} -32$

所求 $= d(A, E)$

$$= \frac{|2\cdot 11 + 5\cdot(-5) - 7(-7) + 32|}{\sqrt{2^2+5^2+(-7)^2}}$$

$$= \frac{78}{\sqrt{78}} = \sqrt{78}$$

Ans: A

15. 設 $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, $x+y+z=4$,

當 $x=a$, $y=b$, $z=c$ 時, $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}$ 有最小值。求 $a=$?

Sol. By 柯西不等式,

$$\left[(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2+(\sqrt{z})^2\right]\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{z}}\right)^2\right] \geq (1+2+3)^2$$

$$4 \times \left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\right) \geq 36$$

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z} \geq 9$$

等號成立於

$(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}) \parallel \left(\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{2}{\sqrt{y}}, \frac{3}{\sqrt{z}}\right)$ 或 $(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z})=(0,0,0)$

但因 $x+y+z=4$, $\therefore$ 可知 $(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}) \neq (0,0,0)$

設 $\dfrac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\dfrac{\sqrt{y}}{\frac{2}{\sqrt{y}}}=\dfrac{\sqrt{z}}{\frac{3}{\sqrt{z}}}=t$

$\Rightarrow \quad x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}=t$

$\Rightarrow \quad x=t$, $y=2t$, $z=3t$ 代入 $x+y+z=4$

$\therefore \quad t+2t+3t=4 \Rightarrow t=\frac{2}{3}$

故當 $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{4}{3}$, $z=2$ 時, $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}$ 有最小值 9

$\therefore a=\frac{2}{3}$

Ans: B

16. 若 $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$ 且 $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$.
求 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=?$

Sol. 法一. 設 $\alpha=90^\circ$, $\beta=210^\circ$, $\gamma=330^\circ$ 可滿足
$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$ 且 $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$
則 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=0^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$

法二. 設 $z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$
$z_2=\cos\beta+i\sin\beta$
$z_3=\cos\gamma+i\sin\gamma$

則 $z_1+z_2+z_3=0$
$\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}=0$
$z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}=z_3\overline{z_3}=1$

$$\begin{aligned}
z_1^2+z_2^2+z_3^2 &= (z_1+z_2+z_3)^2-2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)\\
&= 0-2(z_1z_2z_3\overline{z_3}+z_1\overline{z_1}z_2z_3+z_2\overline{z_2}z_3z_1)\\
&= -2z_1z_2z_3(\overline{z_3}+\overline{z_1}+\overline{z_2})\\
&= 0.
\end{aligned}$$

又. $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$

$\Rightarrow (\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2i\cos\alpha\sin\alpha$
$+(\cos^2\beta-\sin^2\beta)+2i\cos\beta\sin\beta$
$+(\cos^2\gamma-\sin^2\gamma)+2i\cos\gamma\sin\gamma=0$

$\Rightarrow \cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma=0$

$\therefore \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{1+\cos2\alpha+1+\cos2\beta+1+\cos2\gamma}{2}=\frac{3}{2}$

Ans: D

17. $x^2-(3-2i)x+(5-5i)=0$，設答案為 $x=a+bi$，$a,b\in\mathbb{R}$，則 b 值可能為？

Sol. $$x=\frac{(3-2i)\pm\sqrt{(3-2i)^2-4(5-5i)}}{2}$$

$$=\frac{(3-2i)\pm\sqrt{-15+8i}}{2} \quad —(*)$$

令 $(a+bi)^2=-15+8i=-15+2\cdot 4i=(1+4i)^2$

$\therefore\ a+bi=\pm(1+4i)$

$$(*)=\frac{(3-2i)\pm(1+4i)}{2}=2+i \text{ or } 1-3i$$

$\therefore$ b 可能為 1 or -3 　　　　Ans: B.

18. 令 $a=\det\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&4&8&16\\3&9&27&81\\4&16&64&256\end{pmatrix}$，求 a 的正因數個數？

[101 第56回 例1 (1)]

Sol. 法一

$$a=2\times3\times4\times\det\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\\1&4&16&64\end{pmatrix}$$

$$=2^3\times3\times\det\begin{pmatrix}1&1&1^2&1^3\\1&2&2^2&2^3\\1&3&3^2&3^3\\1&4&4^2&4^3\end{pmatrix}$$

$$=2^3\times3\times(4-1)(4-2)(4-3)(3-1)(3-2)(2-1)$$

$$=2^3\cdot3\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot1=2^5\cdot3^2$$

$\therefore$ 正因數個數為 $(5+1)(2+1)=18$.

法二.

$$a = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \\ 4 & 16 & 64 & 256 \end{pmatrix}$$

$\times(-1)$ $\times(-1)$ $\times(-1)$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 18 & 54 \\ 4 & 12 & 48 & 192 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 6 & 18 & 54 \\ 12 & 48 & 192 \end{pmatrix}$$

$$= 2\times 6\times 12\times \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

$$= 2\times 6\times 12\times (4-2)(4-3)(3-2) = 2^5\times 3^2$$

$\therefore$ 正因數個數為 $(5+1)(2+1)=18$

Ans: B

19. 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 若 $A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = O_3$, $a,b,c \in \mathbb{R}$

求 $b=$?

Sol. 找 A 的特徵多項式 $f(x) = \det(A - xI)$, $f(A) = O_3$.

$$f(x) = \det(A - xI) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 2 & -1 \\ 2 & -x & 1 \\ -1 & 1 & 2-x \end{pmatrix}$$

$$= -x(1-x)(2-x) - 2 - 2 + x - 4(2-x) - (1-x)$$

$$= -x(x^2 - 3x + 2) - 4 + x - 8 + 4x - 1 + x$$

$$= -x^3 + 3x^2 + 4x - 13$$

$$f(A) = -A^3 + 3A^2 + 4A - 13I_3 = O_3$$

$$\Rightarrow A^3 - 3A^2 - 4A + 13I_3 = O_3$$

$\therefore b = -4$

Ans: D

20. 設 $f(x)=(x+1)^{100}+x\sin x+\sec x$，則 $f'(0)=$?

Sol. $f(x)=\left(C_0^{100}x^0+C_1^{100}x^1+C_2^{100}x^2+\cdots+C_{100}^{100}x^{100}\right)+x\sin x+\sec x$

$f'(x)=\left(C_1^{100}+C_2^{100}\cdot 2x+\cdots+C_{100}^{100}\cdot 100x^{99}\right)$

$+\left(1\cdot\sin x+x\cos x\right)+\sec x\tan x$

$\therefore f'(0)=C_1^{100}+\sin 0+\sec 0\tan 0$

$=100$

Ans: B

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^5}+\frac{2^4}{n^5}+\cdots+\frac{n^4}{n^5}\right)=$?

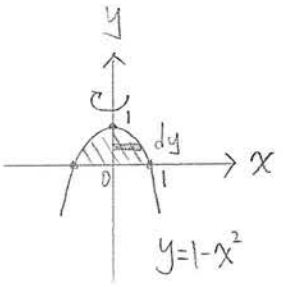
Sol. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{2}{n}\right)^4+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^4\right]\cdot\frac{1}{n}$

$=\int_0^1 x^4\,dx=\frac{1}{5}x^5\Big|_0^1=\frac{1}{5}$

Ans: A

22. S為 $y=1-x^2$ 與x軸圍成之區域，求S繞y軸後所形成的物體體積？

Sol.



$x^2=1-y$

$x=\pm\sqrt{1-y}$

$V=\int_0^1 \pi r^2\,dy$

$=\pi\cdot\int_0^1(\sqrt{1-y})^2\,dy$

$=\pi\int_0^1 1-y\,dy$

$=\pi\left[y-\frac{1}{2}y^2\right]_0^1$

$=\pi\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$

Ans: B.

23. 設 $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2}$，f 在點 $(1,1)$ 沿著方向 $(1,2)$ 的方向導數為何？

Sol. 法一. $\vec{u}=\dfrac{\langle 1,2\rangle}{\sqrt{1^2+2^2}}=\left\langle \dfrac{1}{\sqrt5},\dfrac{2}{\sqrt5}\right\rangle$

$$D_{\vec{u}}\big(f(1,1)\big)=\lim_{t\to0}\frac{f\left(1+\frac{1}{\sqrt5}t,\ 1+\frac{2}{\sqrt5}t\right)-f(1,1)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac12\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt5}t\right)^2+\left(1+\frac{2}{\sqrt5}t\right)^2\right]-\frac12(1+1)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t^2+\frac{6}{\sqrt5}t+2-2}{2t}$$

$$=\lim_{t\to0}\left(\frac12t+\frac{3}{\sqrt5}\right)=\frac{3}{\sqrt5}$$

法二. $\nabla f=\langle f_x,f_y\rangle=\langle x,y\rangle$

$\vec{u}=\left\langle \dfrac{1}{\sqrt5},\dfrac{2}{\sqrt5}\right\rangle$

$$D_{\vec{u}}\big(f(1,1)\big)=\nabla f(1,1)\cdot\vec{u}$$

$$=\langle 1,1\rangle\cdot\left\langle \frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5}\right\rangle$$

$$=\frac{3}{\sqrt5}$$

Ans: D

24. 由 (1,1,-2), (2,-1,1), (1,-2,-2) 所張開的平行六面體體積為何？

Sol.
$$V = \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} \right|$$
$$= \left| 2+1+8-2+4+2 \right| = 15$$

Ans: A

25. 考慮 $\begin{cases} 2x+y+3z=2 \\ x+3y+z=1 \\ x-2y+2z=1 \end{cases}$，此方程式的解為何？

Sol. ∵ 三平面的法向量均不互相平行

∴ 三平面的相交情形只有以下 3 種

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

∴ 此方程式有無限多組解

Ans: C