高雄市104學年度市立高級中等學校聯合教師甄選

數學科試題卷

【※ 答案一律寫在答案本上】

1. 求所有滿足 $(m+n)^m = n^m + 1413$ 的所有正整數m, n

2. 證明 $x^8 - x^5 + x^2 + x + 1 = 0$ 沒有實根

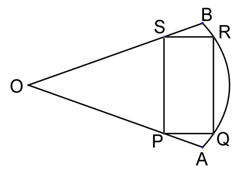
3. 已知直角 $\triangle ABC$ 的兩股邊長分別爲 a, b，$\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{a^{1-\log_a^b}}$，試證明： $\log(a+b) - \log\sqrt{6} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$

4. 設x, y爲實數，且x, y滿足條件$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 3$，則 $\frac{y}{x}$ 之最小值________。

5. $x \in \mathbb{R}$，若$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$ 在 $x = 1$ 時有極小值爲 2，則$f(x)$的極大值爲 ________。

6. 四邊形 $ABCD$ ，對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 P 點，若 $\triangle ABP$ 的三邊長爲 5, 6, 7，且 $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$ ，求四邊形 $ABCD$ 的面積爲 ________。

7. 如圖所示，扇形 AOB 之圓心角$\angle AOB = 60°$，半徑 $\overline{OA} = 1$，則內接矩形$PQRS$ $(R, Q$在圓弧$\overset{\frown}{AB}$上$)$之最大面積爲________。



8. 隨意將編號1至7的七張卡片排成一列，恰有三張卡片所排的順序與它的編號 號相同的機率爲________。

9. 試求 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2}\left[\sqrt{4n^2-1^2} + \sqrt{4n^2-2^2} + \ldots + \sqrt{4n^2-n^2}\right] =$________。

10. 在擲一個公正骰子的遊戲中規定：若遊戲者在一次投擲中擲出的點數並非6 點，則此遊戲者只能拿到 m 元並停止遊戲；若遊戲者擲出6點，怎可獲得 獎金10元並有再次擲骰子的機會。已知一遊戲者要玩這個遊戲直到他擲到 非6點才停止遊戲的得獎金期望值5元，則 $m =$________。

11. 求$(x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y})^8$展開式中 xy項之係數爲 $=$________。

12. 將與2015互質的正整數由小到大排列，則第2015個數爲________。

13. 給定空間中四點 $A(a_1, a_2, a_3)$，$B(2, -3, 6)$，$C(11, 1, 5)$，$D(6, d_2, d_3)$，若 A，B，C，D 四點形成一正四面體，且a_1, a_2, a_3, d_2, d_3 皆爲整數，試求A點坐標。

14. 若多項式方程式 $x^3 + 4x^2 + 5x - 8 = 0$ 的三根爲 α, β, γ，試求以 $\frac{2}{\alpha+2}, \frac{2}{\beta+2}, \frac{2}{\gamma+2}$爲三根的多項式方程式。

15. 令$N = \sum_{k=1}^{2015} k[\log_2 k]$，其中$[\log_2 k]$ 表不大於 $\log_2 k$ 的最大整數，試問N 除以1000的餘數爲________。

Typeset by $\mathcal{AMS}$-$\LaTeX$