高雄市104學年度市立高級中等學校聯合教師甄選

數學科試題卷

【※答案一律寫在答案本上】

一、計算證明題:一律詳列過程；1~5 題每題 6 分，6~15 每題 7 分。

1. 求所有滿足 $(m+n)^m = n^m + 1413$ 的所有正整數 m, n。

2. 證明 $x^8 - x^5 + x^2 + x + 1 = 0$ 沒有實根。

3. 已知直角ΔABC的兩股邊長分別為a, b，$\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{a^{1-\log_a b}}$，

   試證: $\log(a+b) - \log\sqrt{6} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$。

4. 設x, y為實數，且x, y滿足條件$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 3$，則$\frac{y}{x}$之最小值

   為_________。

5. $x \in R$，若 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$ 在$x = 1$有極小值為 2，求$f(x)$的極大值

   為_________。

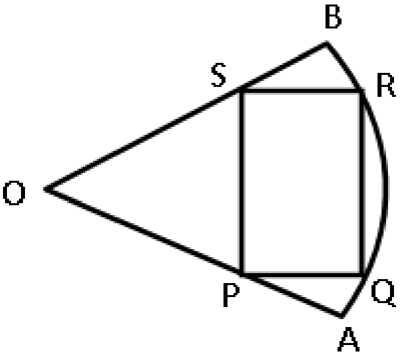
6. 四邊形$ABCD$，對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$交於P點，若ΔABP的三邊長為 5、6、7，

   且$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$，求四邊形$ABCD$的面積為_________。

7. 如圖所示，扇形AOB之圓心角$\angle AOB = 60°$，半徑

   $\overline{OA} = 1$，則內接矩形$PQRS$ （R, Q在圓弧 $\overset{\frown}{AB}$

   上）之最大面積為_________。



8. 隨意將編號 1 至 7 的七張卡片排成一列，恰有三張卡片所排的順序與它的編號相同的機率為__________。

9. 試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4n^2}\left[\sqrt{4n^2-1^2}+\sqrt{4n^2-2^2}+\ldots+\sqrt{4n^2-n^2}\right]=$__________。

10. 在擲一個公正骰子的遊戲中規定：若遊戲者在一次投擲中擲出的點數並非 6 點，則此遊戲者只能拿到 m 元並停止遊戲；若遊戲者擲出 6 點，則可獲得獎金 10 元並有再次擲骰子的機會。已知一遊戲者要玩這個遊戲直到他擲出非 6 點才停止遊戲的得獎金期望值為 5 元，則 $m=$__________。

11. 求 $(x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})^8$ 展開式中 xy 項之係數為__________。

12. 將與 2015 互質的正整數由小到大排列，則第 2015 個數為何？

13. 給定空間中四點 $A(a_1,a_2,a_3)$，$B(2,-3,6)$，$C(11,1,5)$，$D(6,d_2,d_3)$，若 A,B,C,D 四點形成一正四面體，且 a_1,a_2,a_3,d_2,d_3 皆為整數，試求 A 點坐標。

14. 若多項式方程式 $x^3+4x^2+5x-8=0$ 的三根為 α,β,γ，試求以 $\dfrac{2}{\alpha+3},\dfrac{2}{\beta+3},\dfrac{2}{\gamma+3}$ 為三根的多項式方程式。

15. 令 $N=\sum_{k=1}^{2015}k\left[\log_2 k\right]$，其中 $\left[\log_2 k\right]$ 表不大於 $\log_2 k$ 的最大整數，試問 N 除以 1000 的餘數為何？