

國立高科實驗高級中等學校 115 學年專任教師甄選

國中部-數學領域數學專長 初試試題

※ 考試時間：10：10~11：50，共 100 分鐘。交卷時，請連同本試題卷一併繳回。

※ 本試題共 4 頁，滿分 100 分。

※ 答案卷共 2 張，非選題請務必清楚標示題號，計算題請詳列計算過程以供評閱。

一、單選題(每題 5 分)

1. 定義

$$t = \frac{1^2}{1 \times 3} + \frac{2^2}{3 \times 5} + \frac{3^2}{5 \times 7} \cdots + \frac{1314^2}{2627 \times 2629}$$

記號 $[t]$ 表示不大於 t 的最大整數， $\{t\}$ 表示 t 的小數部分。問下列哪一個選項是錯的？

- (A) $t > 1$
- (B) $4t > 1314$
- (C) $[t] = 657$
- (D) $\{t\} > \frac{1}{2}$

2. 設 $\{a_n\}$ 為一等比數列，且滿足 $a_4 > a_5 = 1$ 。若存在自然數 n ，使得

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n > \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n},$$

則此類 n 的最大值為何？

- (A) 7
- (B) 8
- (C) 9
- (D) 10

3. 下列哪一個選項的敘述錯誤？

- (A) 若 a^2 為有理數，且 a^5 也是有理數，則 a 必為有理數。
- (B) $\sqrt{2} + \sqrt{11} < \sqrt{6} + \sqrt{7}$ 。
- (C) a, b 為正實數，若 $a + 3b = 12$ ，則 $a \times b$ 的最大值為 12。
- (D) a, b 為實數，若 $a + b\sqrt{33} = 0$ ，則 $a = b = 0$ 。

4. 如圖 1。政府因興建公共建設，需徵收阿土伯的農地（圖中灰色部分）建設成寬度為 4 公尺的新道路。請問：阿土伯被徵收的農地為多少平方公尺？

- (A) 120 (B) 160 (C) 200 (D) 250

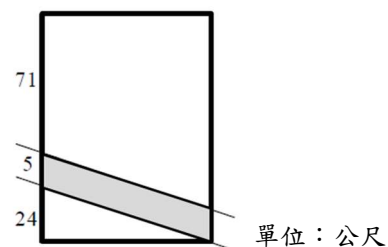


圖 1

5. 下列有五組資料，每組各有 6 筆數值：

組別	數值資料
I	2、3、4、5、6、7
II	9、8、7、6、5、4
III	4、9、16、25、36、49
IV	2、3、4、5、6、7
V	-4、-6、-8、-10、-12、-14

四位學生針對上表資料提出以下主張：

甲生：考慮標準差 σ ，則 $\sigma_I = \sigma_{II}$ 。

乙生：考慮第 1 四分位數 Q_1 ，五組數值中第 III 組的 Q_1 最大。

丙生：考慮中位數 M_e ，五組數值中第 I 組的 M_e 最小。

丁生：考慮算術平均數 μ ， $\mu_{III} = (\mu_I)^2$ 。

關於四位學生的說法，誰的說法正確？

- (A) 只有甲和乙 (B) 只有甲和丙 (C) 只有乙和丙 (D) 只有乙和丁

二、填充題（每題 4 分）

6. 記號 $[a]$ 表示小於或等於 a 的整數中最大的。例如 $[3.12] = 3$ ，求 $\frac{1}{[\sqrt{2014}]} + \frac{1}{[\sqrt{2015}]} + \dots + \frac{1}{[\sqrt{2033}]}$ 的值。

7. 如圖 2 所示，直線 L 交拋物線 $y = x^2$ 於兩點 Q 、 R ，交拋物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ 於兩點 P 、 S 。已知 P 、 R 的 x 座標分別為 -4 和 1 ，求下列三個三角形的面積比 $\Delta OPQ : \Delta OQR : \Delta ORS$ 。

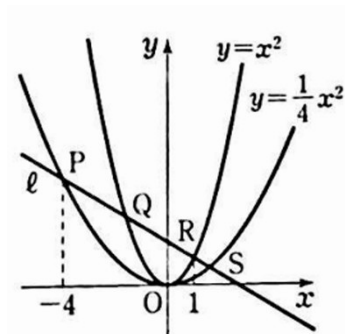


圖 2

8. 三個點 $A(3, 7)$ 、 $B(8, 4)$ 、 $C(6, 9)$ 為三角形 ΔABC 的頂點。接著同時擲出兩顆骰子，設骰子 P 的點數為 a ，骰子 Q 的點數為 b ，並令通過原點 O 的直線 $L: y = \frac{b}{a}x$ 。求在這種情況下：直線 L 不與 ΔABC 的邊或內部有交點的機率為？

9. 如圖 3 有一個等腰直角三角形 ΔABC ，滿足 $\overline{AB} = \overline{BC} = 6$ 公分。今有動點 P 從 A 點出發，以每秒 3 公分的速率，沿著邊 $AB \rightarrow BC$ 的順序移動，最終在 C 點停下來。同時，動點 Q 從 B 點出發，以每秒 2 公分的速率，沿著邊 BC 朝 C 點移動，並在 C 點停下。設動點 P 、 Q 出發後過了 t 秒時，三角形 ΔAPQ 的面積為 $f(t)$ 平方公分， $0 \leq t \leq 4$ 。

試求 t 為何時，三角形 ΔAPQ 的面積為三角形 ΔABC 的 $1/3$ 。

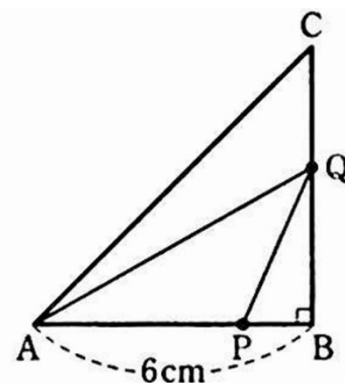


圖 3

10. 有一數列 $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots, 1999^2$ 共計 1999 項。請問：此數列每一項數字的十位數為偶數的共有 _____ 項。

11. 數列 a_1, a_2, a_3, \dots 首項 $a_1 = 2024$ ，後項是前一項每一個位值數字的平方和（例如： $a_2 = 2^2 + 0^2 + 2^2 + 4^2 = 24$ ， $a_3 = 2^2 + 4^2 = 20$ ，依此類推）。求 a_{2024} 之值為 _____。

12. 如圖 4。同時投擲一枚「三次方」的灰色正立方體骰子（六個面分別為 $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3$ ），和一枚「二次方」的白色正立方體骰子（六個面分別為 $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2$ ）。請問：灰色骰子擲出的數值與白色骰子擲出的數值之比值為整數的機率為_____。

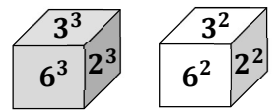
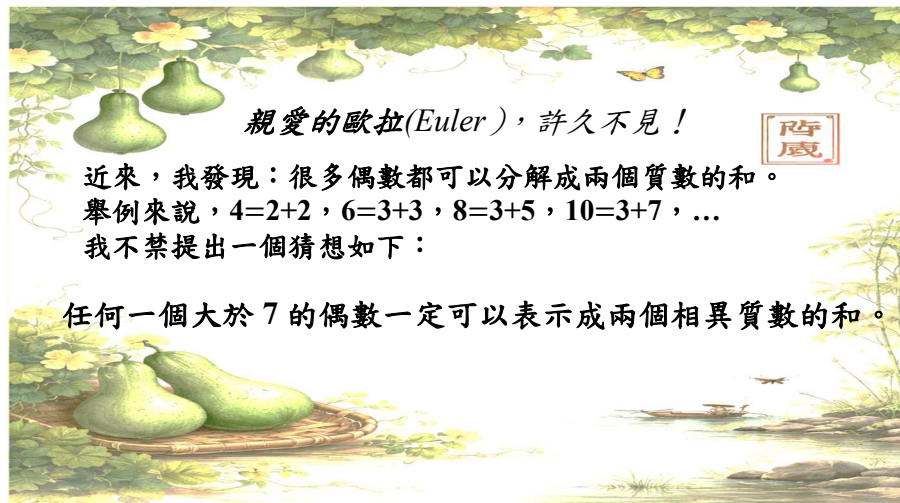


圖 4

13. 哥德巴赫 (Goldbach) 是 18 世紀後非常著名的數學家之一。他於西元 1742 年寫信給另一位著名的數學家歐拉 (Euler)，信中提到：



然而，哥德巴赫與歐拉在當時都無法證明這個猜想。於是，這道問題便流傳了二百多年。直到二十世紀，我們才開展對此問題的深入探究。若小明希望找到兩個不同的質數 p 與 q ，使得 $p+q = 192$ ，並且能讓 $2p-q$ 的值越大越好。請問：數對 $(p, q) =$ _____。

14. 若 $a < b < c$ 且滿足以下條件：

- 【條件 1】 a 是 $b + c$ 的因數；
- 【條件 2】 b 是 $c + a$ 的因數；
- 【條件 3】 c 是 $a + b$ 的因數；
- 【條件 4】 a, b 與 c 的總和小於 2026。

我們稱正整數三元組 (a, b, c) 為 V-三元組。請問，滿足上述條件的 V-三元組共有_____組？

三、計算題(每題 6 分)

15. 求一個二次多項式 $P(x)$ ，其係數皆為整數，且二次項係數為 9，使得對任意十進位表示只含數字 1 的正整數 n ， $P(n)$ 十進位表示中的每一位數的數字皆為 1。
16. 求所有實數 a ，使得下列兩個方程 $x^2 + ax + 1996 = 0, x^2 + 1996x + a = 0$ 都具有兩個整數根。

17. 如右方示意圖 5-1 及圖 5-2，已知中心對稱排列的 3 個相同大小的圓，半徑皆為 r ，此三圓圓心分別位於 A、B、C 三點 ($\triangle ABC$ 為一正三角形)，且此三圓兩兩交於 A、B、C、D、E、F 六個點，若此三圓所能完整覆蓋的最大半徑的圓其半徑為 $\sqrt{3}$ ，求 r 的值為？(圖示中虛線所圍圓形即為此三圓所若覆蓋的圓之一)

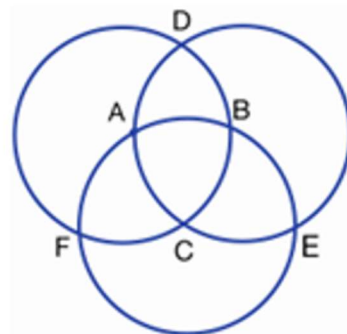


圖 5-1

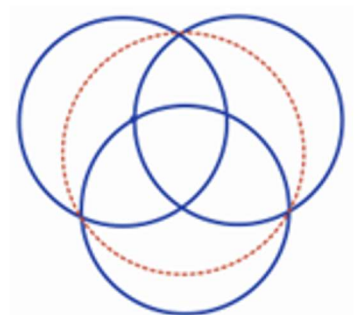


圖 5-2

18. 棋盤上一枚「國王」(king)放在一個 6×6 棋盤的左下角。每一步它可以向上走一格、或向右走一格，或同時向右上走一格。問它從左下角走到右上角共有多少種不同走法？

四、探究申論題(15分)

19. 為因應路竹、橋頭、楠梓等科學園區陸續成立，本校（國立高科實驗高級中等學校）成立主要是以發展實驗、雙語等特色，期許能夠吸引國際、國內高科技人才前來就業，並落根於此，將子女設籍於本校周圍學區，前來本校就讀。因此，本校規劃發展智慧科技、國際視野、淨零永續、跨域共榮以及人文創藝等面向之特色，並明確擘劃國小、國中與高中不同階段之發展方向（請參見下圖 6）。身為即將成為本校一份子的您，您準備好了嗎？

- (1) 請從圖 6 中的五個面向（智慧科技、國際視野、淨零永續、跨域共榮以及人文創藝）中自選一個面向，針對國中階段學生說明您期待他們在七~九年級，應各自達成的目標或展現的行為何？才能發展出符合本校期待之未來公民。（5分）
- (2) 身為一位數學教師，更應思考如何在自己的教學脈絡中，發展出符合圖 6 中各面向（智慧科技、國際視野、淨零永續、跨域共榮以及人文創藝）特色之教學活動。故，請您選擇國中階段一個單元，結合您規劃之活動，分別從學習內容、教學目標、教學策略、教學活動、評量方式等部分，說明您如何讓您的學生能在此活動進行中，既發展數學領域概念與技能，也發展出符合學校期盼之向本特色之能力。（10分）

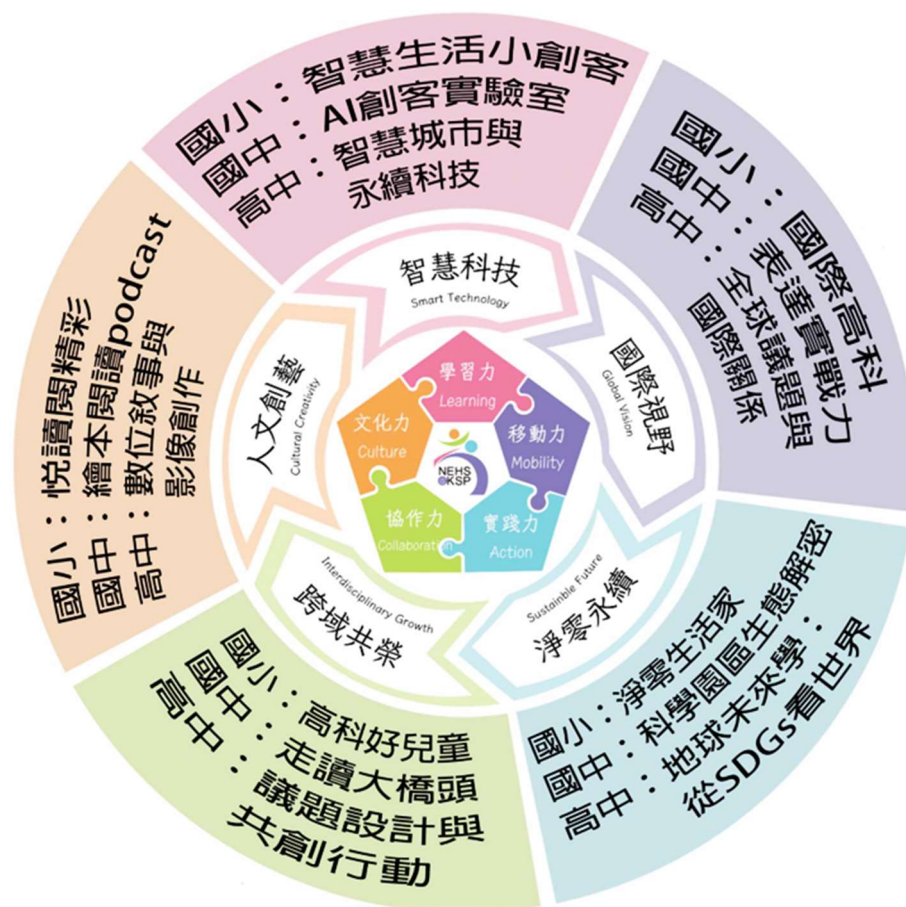


圖 6