

國立玉井工商 100 學年度第一次教師甄試數學科試題

一. 填充題 (每題 7 分)

1. A 為三階方陣, 已知 $A \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 23 \\ 15 \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$, 且 $A \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

求 $A = ?$

2. 空間坐標系中四點, $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,2)$, $D(1,1,1)$,
求四面體 ABCD 的體積為?

3. 已知點 P 為橢圓 $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$ 上的點, $A(6,0)$, $B(-3,4)$, 求 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 的最小值為?

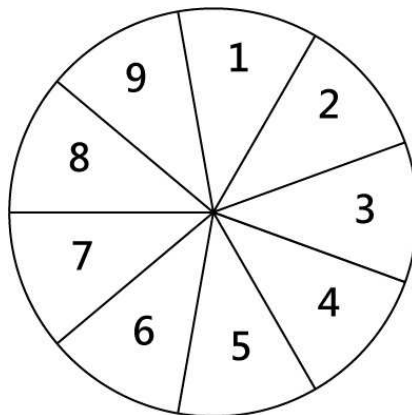
4. 直角坐標系中, $A(5,12)$, $B(12,5)$, $P(x,0)$, 且 $x > 0$, 求 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大值為?

5. 有一個雙曲線, 已知二焦點為 $(0,5)$ 與 $(0,-5)$, 且與直線 $y=x+1$, 切於第一象限的 P 點, 則 P 點的坐標為?

6. 設 $f(x)$ 表定義域為正整數的函數, 且 $f(1)=999$, 又對 $n \geq 2$ 的任意正整數 n , 恆有 $f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(n) = n^2 f(n)$, 求 $f(999) = ?$

7. 袋中有編號 1,2,3,4,5,6,7, 號的球各一個, 設每一球被取到的機會相等, 今由袋中一次任取一球, 每次取完後均放回袋中再取, 令 a_n 表取完 n 次後所取球號總和為 3 的倍數的機率, 求 $a_4 = ?$

8. 用紅, 黑, 黃 3 種顏色塗下列 9 個不同的區域如下圖, 規定每區需塗一色, 顏色可以重複使用, 但相鄰部分不得塗同色, 則共有幾種不同的塗法?



9. 求 $\int_{-1}^7 (-2 + \sqrt{-x^2 + 6x + 7}) dx = ?$

10. 袋中有 3 個紅球, 2 個黑球與 4 個黃球, 設每一球被取到的機會相等, 今由袋中一次任取一球, 每次取完後不放回, 則紅球先取完的機率為?

二. 計算與證明題 (每題 10 分)

1. 凸四邊形 ABCD, 若四邊長分爲 $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$, $\overline{DA}=d$,

證明四邊形 ABCD 的面積 $= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, 其中 $s = \frac{a+b+c+d}{2}$

2. 證明: $2^{312} + 832$ 爲 448 的倍數

3. 已知 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 求 $\frac{64}{\sin \theta} + \frac{27}{\cos \theta}$ 的最小值為?

需列出算式, 只寫答案不予計分